お天気講座

1-② 準地衡風とω方程式

この資料は Shion SekizawaのYouTubeチャンネルの映像講義
https://youtu.be/_yC_RbMXEvg のPDF版スライド資料です

はじめに

- この動画では，日本付近の日々の天気の変化にとって重要となる
  水平スケールが数千km程度の総観規模の気象について解説します
- 2部構成となっており，この動画はその第2部です
  準地衡風近似からω方程式・傾向方程式までを解説します
  第1部をご覧になっていない方は，そちらを先にご覧ください
- 入門的な解説のつもりですが，初めて気象を学ぶ方にはたぶん向いていません
- 数式を使います
  途中の式変形にはあまり時間をかけませんので，
  余裕のある方は手で追ってみてください
- 詳細な式変形についていけなくても，
  結果の式の意味を理解して頂ければ十分かと思います

準地衡風近似

完全に地衡風を仮定すると，鉛直運動が常に0となってしまい面白味がない
あとでみるように，地衡風は自分自身だけでは地衡風を保つことができない

そこで，準地衡風の枠組みでは，地衡風の時間発展を次のように記述する

$$
\begin{cases}
\dfrac{D_g u_g}{Dt} = \dfrac{\partial u_g}{\partial t} + u_g \dfrac{\partial u_g}{\partial x} + v_g \dfrac{\partial u_g}{\partial y} = f_0 v_a \\[2ex]
\underbrace{\dfrac{D_g v_g}{Dt}}_{\text{ラグランジュ的時間変化}} = \underbrace{\dfrac{\partial v_g}{\partial t}}_{\text{オイラー的時間変化}} + \underbrace{u_g \dfrac{\partial v_g}{\partial x} + v_g \dfrac{\partial v_g}{\partial y}}_{\text{地衡風による移流}} = \underbrace{-f_0 u_a}_{\text{非地衡風によるコリオリ加速}}
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
u &= \overset{\text{地衡風}}{u_g} + \overset{\text{非地衡風}}{u_a} \\
v &= v_g + v_a
\end{aligned}
$$

非地衡風にはたらくコリオリ力が
地衡流を時間変化させる

✿ 準地衡風渦度方程式

先ほどの運動方程式の，（下のx微分）－（上のy微分）

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_g}{\partial t}+u_g\frac{\partial v_g}{\partial x}+v_g\frac{\partial v_g}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_g}{\partial t}+u_g\frac{\partial u_g}{\partial x}+v_g\frac{\partial u_g}{\partial y}\right)=-f_0\left(\frac{\partial u_a}{\partial x}+\frac{\partial v_a}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_g}{\partial x}-\frac{\partial u_g}{\partial y}\right)+u_g\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_g}{\partial x}-\frac{\partial u_g}{\partial y}\right)+v_g\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_g}{\partial x}-\frac{\partial u_g}{\partial y}\right)$$

$$+\cancelto{0}{\left(\frac{\partial u_g}{\partial x}+\frac{\partial v_g}{\partial y}\right)}\left(\frac{\partial v_g}{\partial x}-\frac{\partial u_g}{\partial y}\right)=-f_0\underbrace{\left(\frac{\partial u_a}{\partial x}+\frac{\partial v_a}{\partial y}\right)}_{-\frac{\partial \omega}{\partial p}}$$

$$\rightarrow \qquad \frac{\partial \zeta_g}{\partial t}=-u_g\frac{\partial \zeta_g}{\partial x}-v_g\frac{\partial \zeta_g}{\partial y}+f_0\frac{\partial \omega}{\partial p}$$

途中，地衡風と非地衡風に対する連続の式（質量保存）を用いる

$$\frac{\partial u_g}{\partial x}+\frac{\partial v_g}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial u_a}{\partial x}+\frac{\partial v_a}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial p}=0$$

✿ 準地衡風渦度方程式

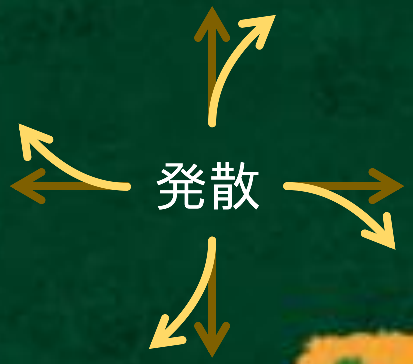
先ほどの運動方程式の，（下のx微分）－（上のy微分）

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_g}{\partial t}+u_g\frac{\partial v_g}{\partial x}+v_g\frac{\partial v_g}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_g}{\partial t}+u_g\frac{\partial u_g}{\partial x}+v_g\frac{\partial u_g}{\partial y}\right)=-f_0\left(\frac{\partial u_a}{\partial x}+\frac{\partial v_a}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_g}{\partial x}-\frac{\partial u_g}{\partial y}\right)+u_g\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_g}{\partial x}-\frac{\partial u_g}{\partial y}\right)+v_g\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_g}{\partial x}-\frac{\partial u_g}{\partial y}\right)$$

$$+\underbrace{\cancel{\left(\frac{\partial u_g}{\partial x}+\frac{\partial v_g}{\partial y}\right)}}_{0}\left(\frac{\partial v_g}{\partial x}-\frac{\partial u_g}{\partial y}\right)=-f_0\underbrace{\left(\frac{\partial u_a}{\partial x}+\frac{\partial v_a}{\partial y}\right)}_{-\frac{\partial \omega}{\partial p}}$$

$$\rightarrow\quad \underbrace{\frac{\partial \zeta_g}{\partial t}}_{\text{オイラー的時間変化}}=\underbrace{-u_g\frac{\partial \zeta_g}{\partial x}-v_g\frac{\partial \zeta_g}{\partial y}}_{\text{地衡風による移流}}+\underbrace{f_0\frac{\partial \omega}{\partial p}}_{\text{発散による渦度伸長}}$$



高気圧性渦度をつくろうとする

✿ 準地衡風熱力学方程式（断熱温度変化）

$$\underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{オイラー的時間変化}} = \underbrace{-u_g\frac{\partial T}{\partial x} - v_g\frac{\partial T}{\partial y}}_{\text{地衡風による移流}} + \underbrace{S_0\omega}_{\text{鉛直流による断熱温度変化}}$$

$S_0 = -\dfrac{T}{\theta_0}\dfrac{d\theta_0}{dp}$ ：平均的な鉛直安定度

＝温位θ_0の鉛直勾配

(ここでは p のみの関数)

上昇流 ($\omega < 0$) → 断熱冷却

下降流 ($\omega > 0$) → 断熱加熱

→ 地衡風渦度と温度の時間変化を記述する式を示した

しかし，温度風の関係より，地衡風渦度と温度は互いに勝手に変化できない

地衡風渦度

$$\zeta_g = \nabla^2\left(\frac{\Phi}{f_0}\right),$$

静水圧平衡

$$\frac{RT}{p} = -\frac{\partial \Phi}{\partial p}$$

両者はジオポテンシャル Φ により結びつく

準地衡風における渦度変化と温度変化

$$\underbrace{\frac{\partial \zeta_g}{\partial t}}_{\text{地衡風の時間変化}} = \underbrace{-u_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial x} - v_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial y}}_{\text{地衡風による移流}} + \underbrace{f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p}}_{\text{非地衡風による時間変化}}$$

$$\underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{地衡風の時間変化}} = \underbrace{-u_g \frac{\partial T}{\partial x} - v_g \frac{\partial T}{\partial y}}_{\text{地衡風による移流}} + \underbrace{S_0 \omega}_{\text{非地衡風による時間変化}}$$

地衡風渦度　　　静水圧平衡

$$\zeta_g = \nabla^2\left(\frac{\Phi}{f_0}\right), \qquad \frac{RT}{p} = -\frac{\partial \Phi}{\partial p}$$

地衡風渦度 ～ Φ のラプラシアン
温度 ～ Φ の鉛直微分

⇩

地衡風渦度の鉛直微分
～ 温度のラプラシアン

→ 地衡風が維持されるためには，
渦度変化の鉛直微分と温度変化のラプラシアンが比例すべき

ω方程式の導出

渦度変化の鉛直微分と温度変化のラプラシアンを Φ で書き換えると，

$$\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\left(\frac{\Phi}{f_0}\right) = \frac{1}{f_0}\frac{\partial^2}{\partial t \partial p}\nabla^2 \Phi$$

$$\nabla^2 \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{p}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right) = -\frac{p}{R}\frac{\partial^2}{\partial t \partial p}\nabla^2 \Phi$$

$$\rightarrow \quad f_0 \frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} = -\frac{R}{p}\nabla^2 \frac{\partial T}{\partial t}$$

であるから，二つの式の右辺の間には次の関係が成り立っていなくてはならない

$$f_0 \frac{\partial}{\partial p}\left(-u_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial x} - v_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial y} + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p}\right) = -\frac{R}{p}\nabla^2\left(-u_g \frac{\partial T}{\partial x} - v_g \frac{\partial T}{\partial y} + S_0 \omega\right)$$

$$\underbrace{\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma_0}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)\omega}_{\text{鉛直流 (非地衡風)}} = \underbrace{-\frac{f_0}{\sigma_0}\frac{\partial}{\partial p}\left(-u_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial x} - v_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial y}\right) - \frac{R}{p\sigma_0}\nabla^2\left(-u_g \frac{\partial T}{\partial x} - v_g \frac{\partial T}{\partial y}\right)}_{\text{地衡風による渦度と温度の移流}}$$

$$\sigma_0 = \frac{R}{p}S_0$$

ω方程式の意味：定性的解釈

$$\underbrace{\left(\nabla^2+\frac{f_0^2}{\sigma_0}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)}_{\text{3次元ラプラシアン}}\omega=-\frac{f_0}{\sigma_0}\frac{\partial}{\partial p}\left(-u_g\frac{\partial\zeta_g}{\partial x}-v_g\frac{\partial\zeta_g}{\partial y}\right)-\frac{R}{p\sigma_0}\underbrace{\nabla^2}_{\text{水平ラプラシアン}}\left(-u_g\frac{\partial T}{\partial x}-v_g\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

ラプラシアンが，細かい構造を強調して符号を反転するものであったことを思い出し，

$\nabla^2+\dfrac{f_0^2}{\sigma_0}\dfrac{\partial^2}{\partial p^2}\sim -K^2$,　　$\nabla^2\sim -k^2$　　のように置き換えると，ω方程式は

$$-K^2\omega=-\frac{f_0}{\sigma_0}\frac{\partial}{\partial p}\mathrm{adv}(\zeta_g)+\frac{k^2R}{p\sigma_0}\mathrm{adv}(T)$$

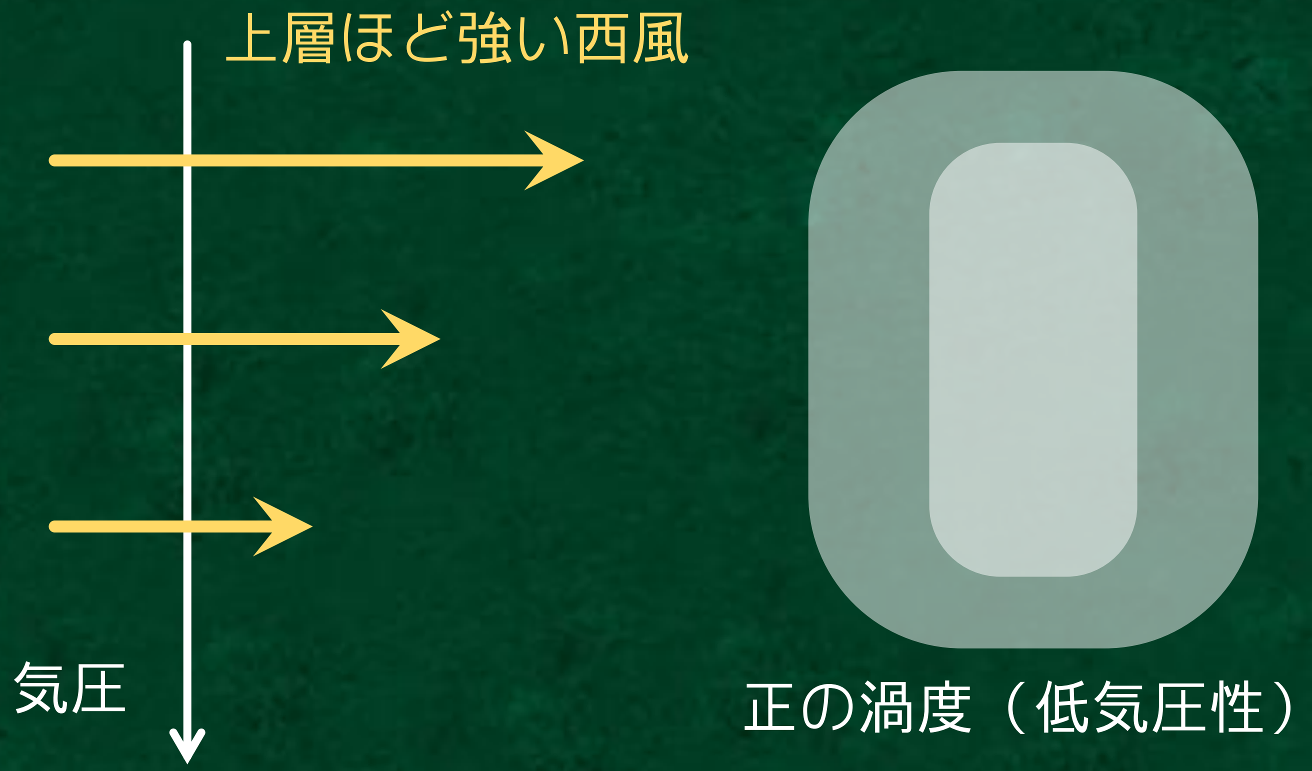
という形をしていることになる

（移流の式も煩雑なので $\mathrm{adv}(\zeta_g)$，$\mathrm{adv}(T)$ のようにまとめた）

ω方程式の意味：定性的解釈，渦度移流

$$\omega \sim \frac{f_0}{K^2\sigma_0}\frac{\partial}{\partial p}\mathrm{adv}(\zeta_g)$$

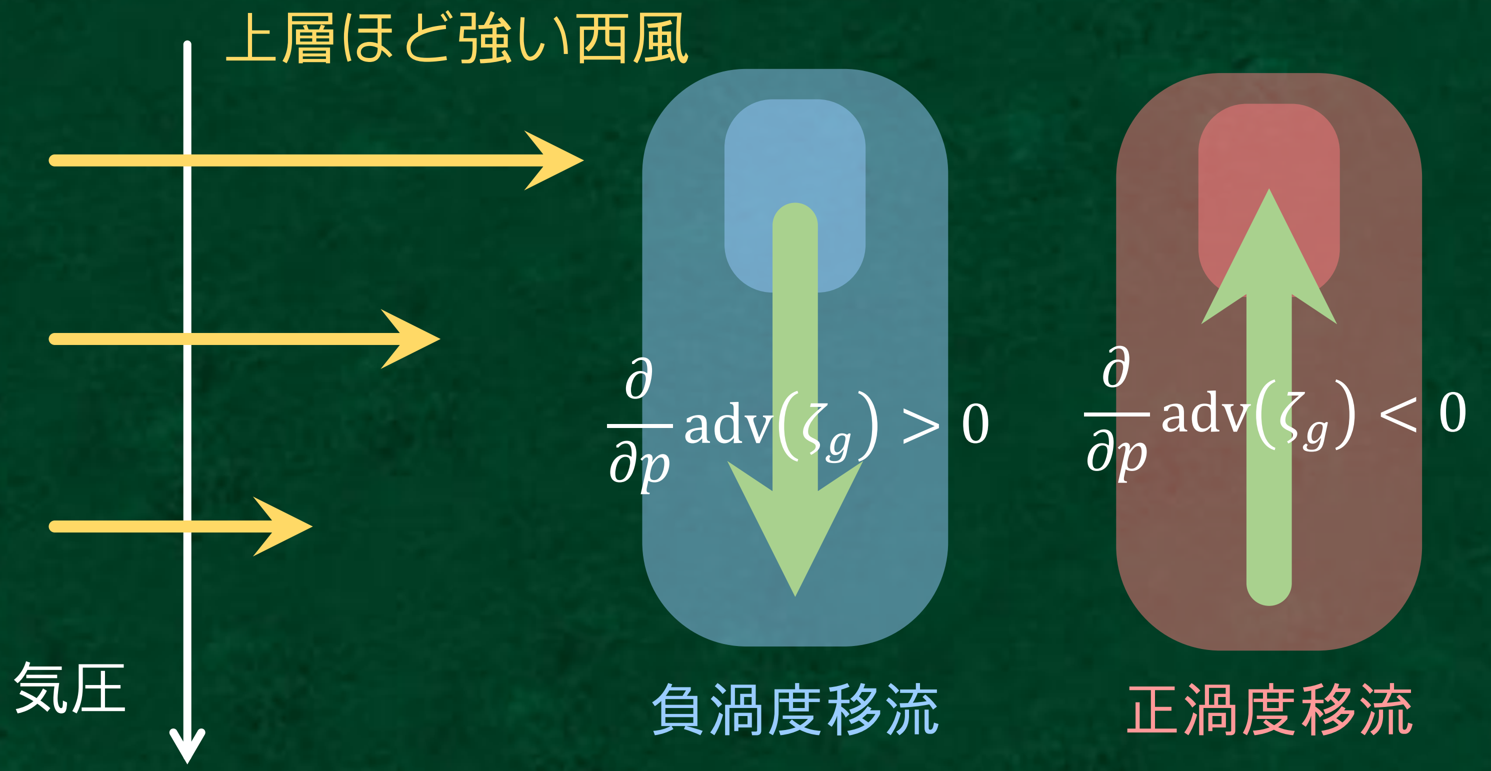
上層ほど渦度移流が大きい $\left(\frac{\partial}{\partial p}\mathrm{adv}(\zeta_g) < 0\right)$ → 上昇流 （$\omega < 0$）



ω方程式の意味：定性的解釈，渦度移流

$$\omega \sim \frac{f_0}{K^2\sigma_0}\frac{\partial}{\partial p}\mathrm{adv}(\zeta_g)$$

上層ほど渦度移流が大きい $\left(\frac{\partial}{\partial p}\mathrm{adv}(\zeta_g) < 0\right)$ → 上昇流 （$\omega < 0$）



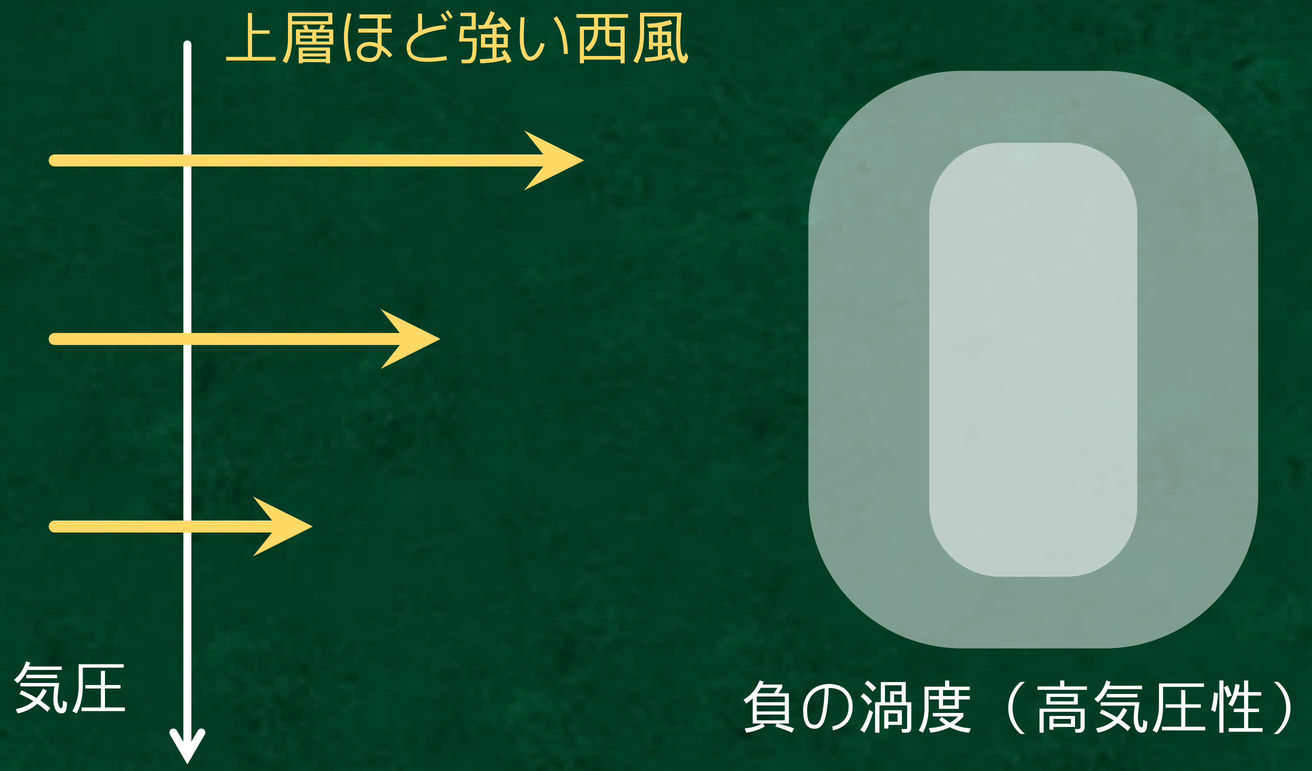
トラフ前面→上昇流
トラフ後面→下降流

上層の正渦度移流
→中層で上昇流

ω方程式の意味：定性的解釈，渦度移流

$$\omega \sim \frac{f_0}{K^2\sigma_0}\frac{\partial}{\partial p}\mathrm{adv}(\zeta_g)$$

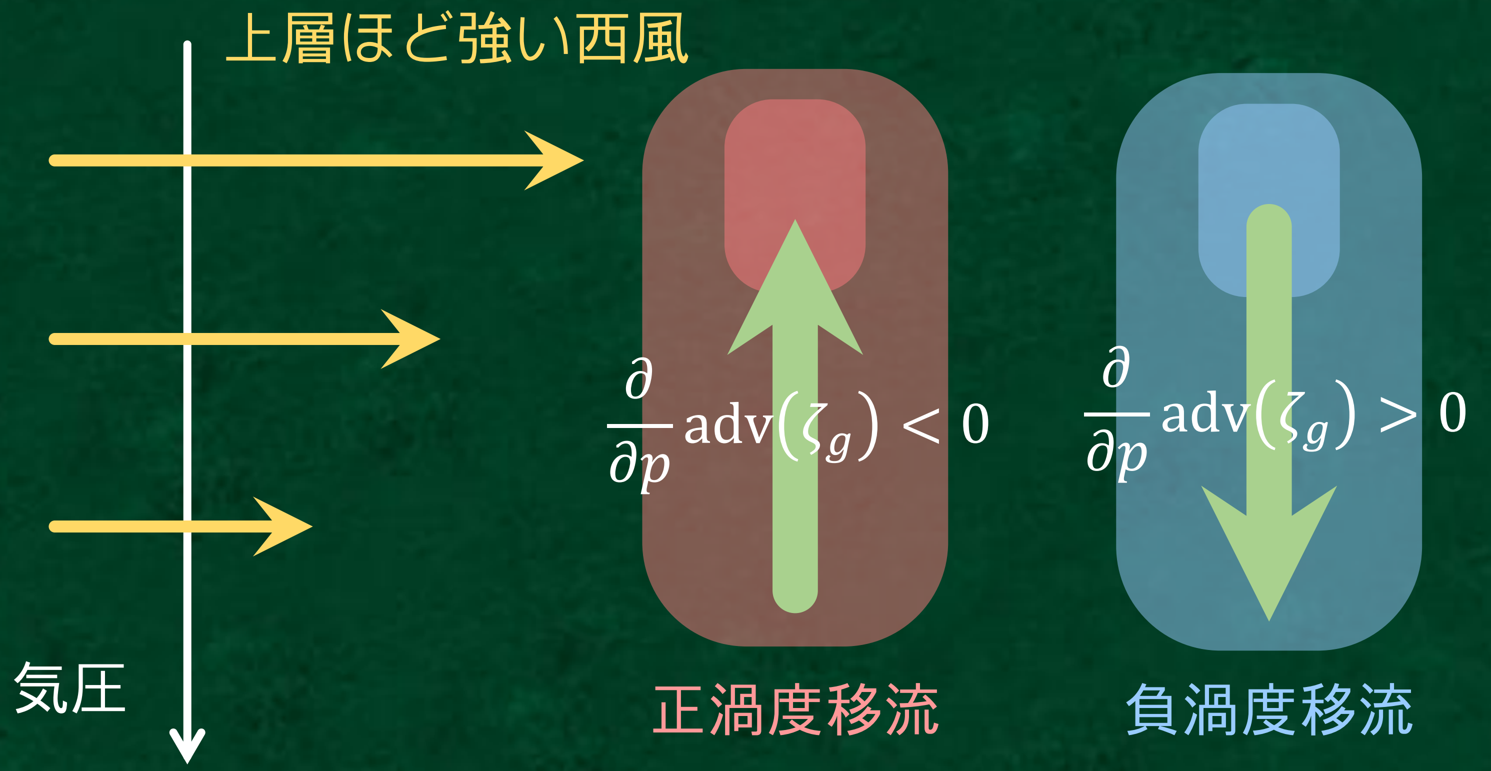
上層ほど渦度移流が大きい $\left(\frac{\partial}{\partial p}\mathrm{adv}(\zeta_g) < 0\right)$ → 上昇流 （$\omega < 0$）



ω方程式の意味：定性的解釈，渦度移流

$$\omega \sim \frac{f_0}{K^2\sigma_0}\frac{\partial}{\partial p}\mathrm{adv}(\zeta_g)$$

上層ほど渦度移流が大きい $\left(\frac{\partial}{\partial p}\mathrm{adv}(\zeta_g) < 0\right)$ → 上昇流 （$\omega < 0$）



リッジ前面→下降流

リッジ後面→上昇流

上層の負渦度移流

→中層で下降流

ω方程式の意味：定性的解釈，温度移流

$$\omega \sim -\frac{k^2 R}{K^2 p \sigma_0} \mathrm{adv}(T)$$

暖気移流（$\mathrm{adv}(T) > 0$）　→　上昇流　（$\omega < 0$）

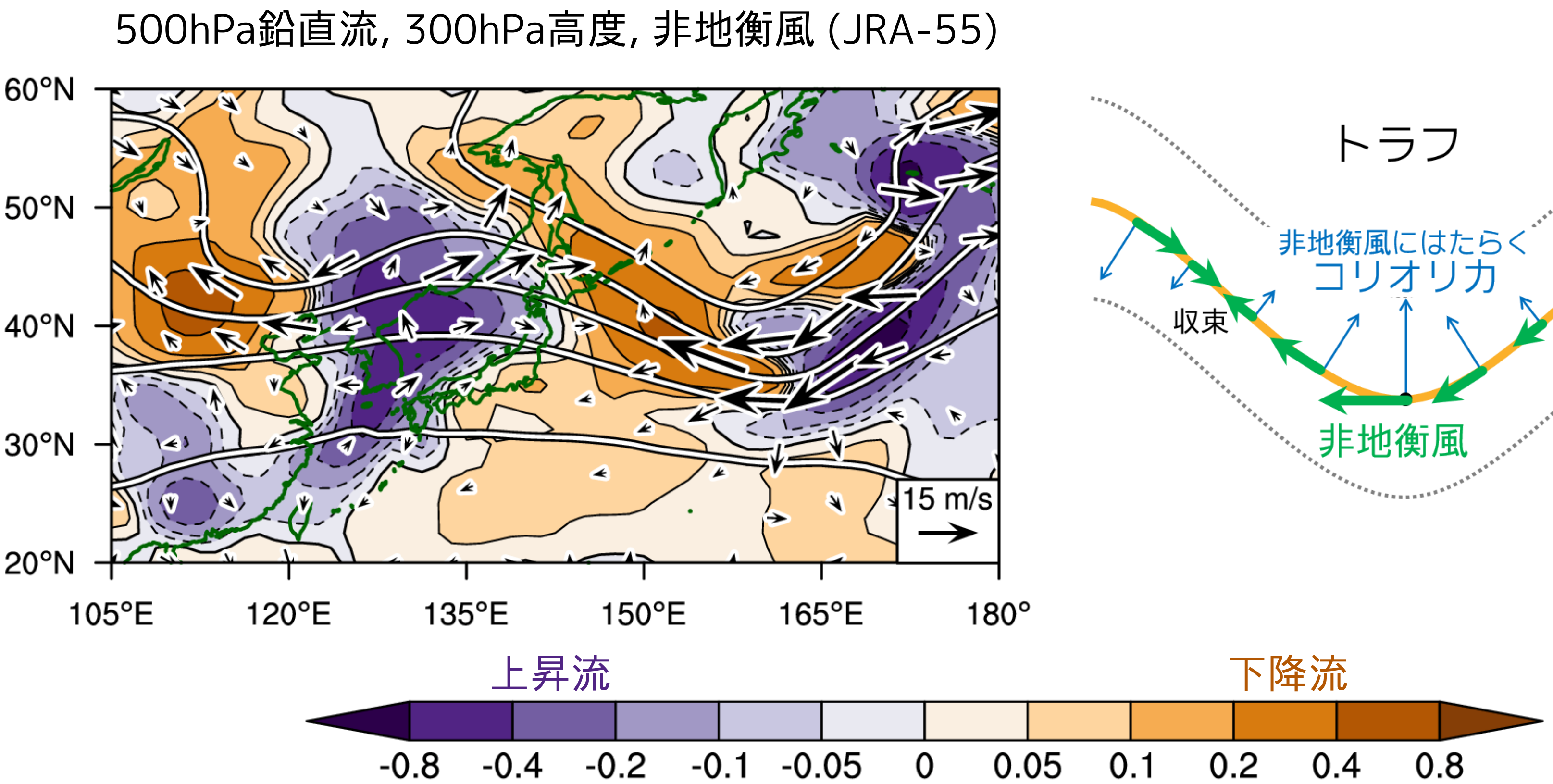
寒気移流（$\mathrm{adv}(T) < 0$）　→　下降流　（$\omega > 0$）

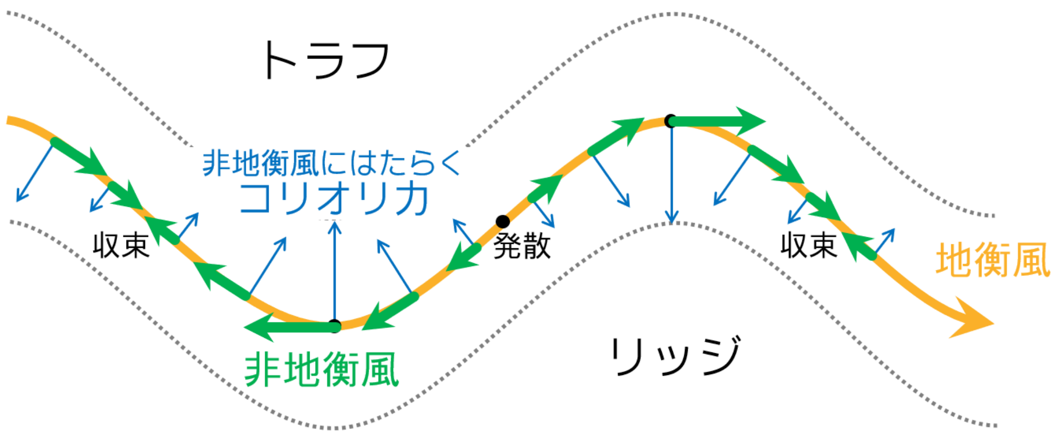
トラフ前面→上昇流

トラフ後面→下降流

ω方程式から診断される鉛直流の例

JRA-55全球大気再解析データの鉛直流と，ω方程式から診断した鉛直流との比較

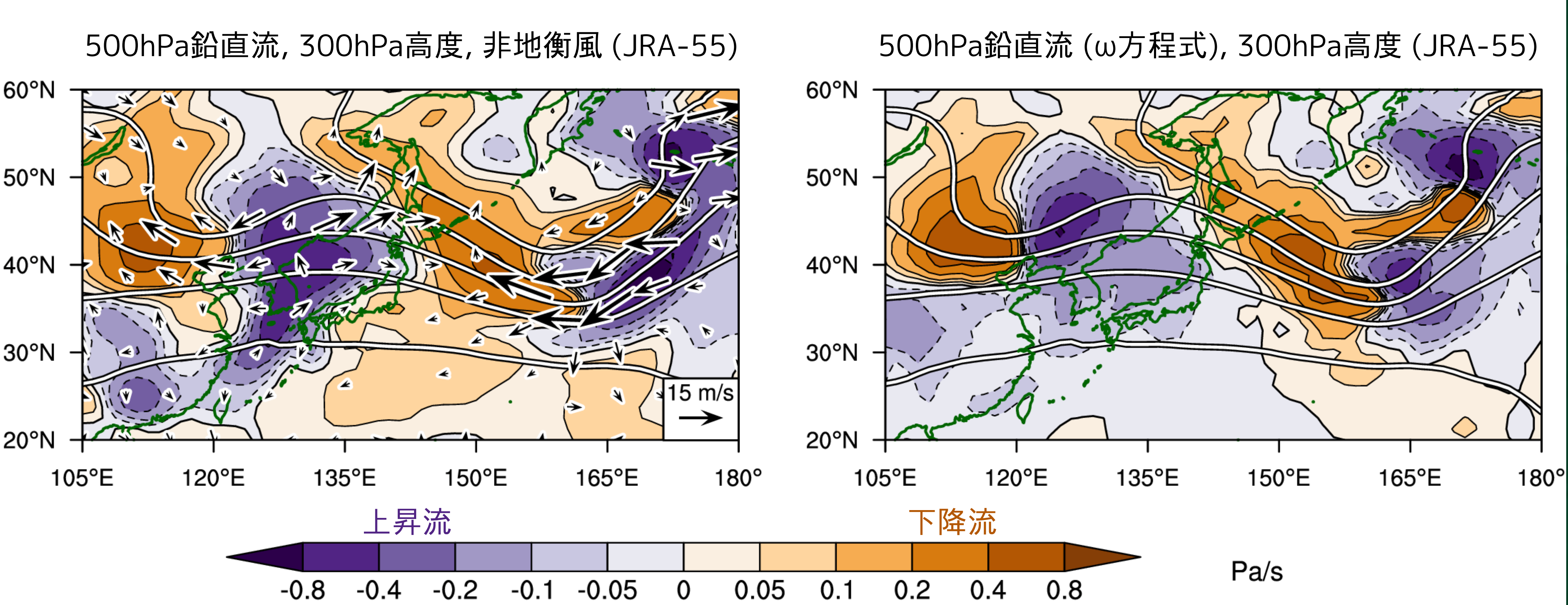




トラフ前面の上昇流とトラフ後面の下降流をよく見積もる

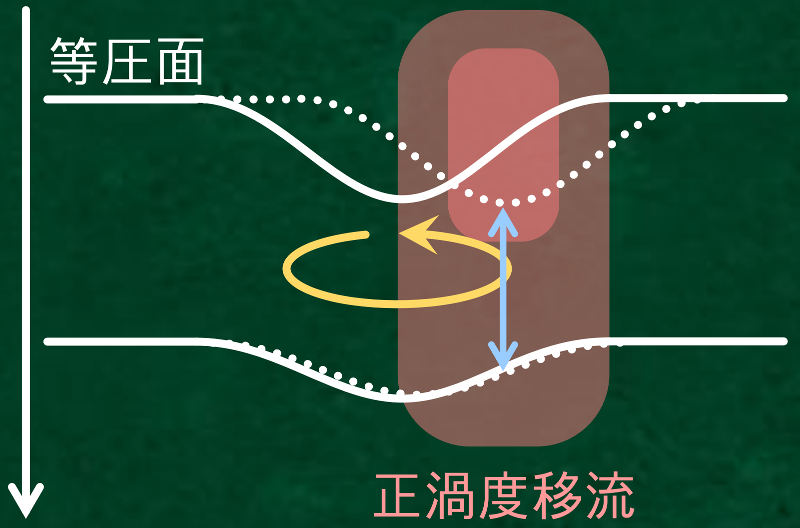
ω方程式から診断される鉛直流の例

JRA-55全球大気再解析データの鉛直流と，ω方程式から診断した鉛直流との比較



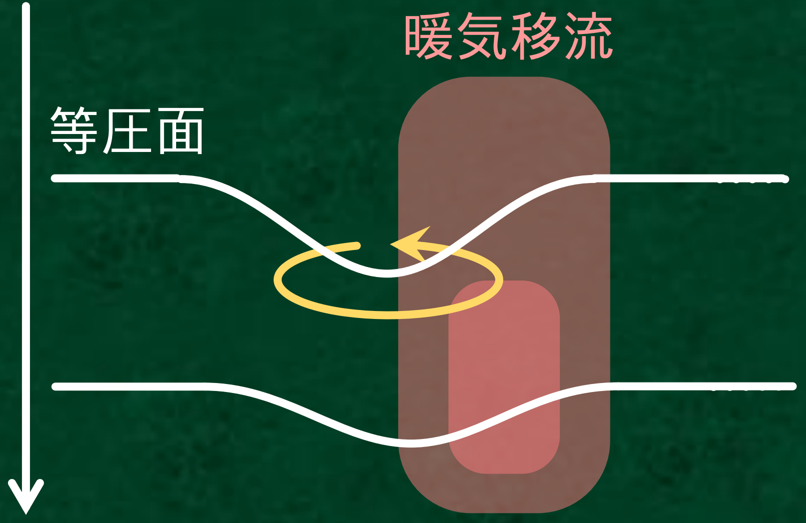
トラフ前面の上昇流とトラフ後面の下降流をよく見積もる

✿ ω方程式の意味：定性的解釈，非地衡風による調節



上層 $\dfrac{\partial \zeta_g}{\partial t} = \mathrm{adv}(\zeta_g)$ （正　正）

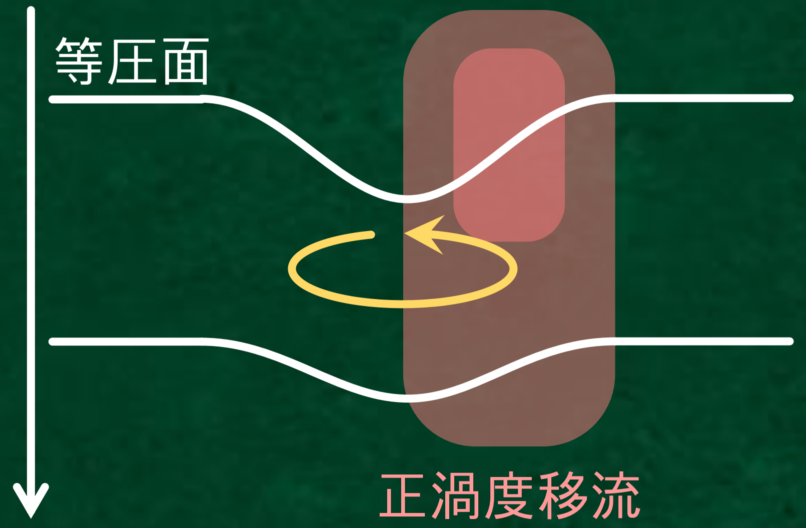
下層 $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{adv}(T)$ （負　正）



上層 $\dfrac{\partial \zeta_g}{\partial t} = \mathrm{adv}(\zeta_g)$

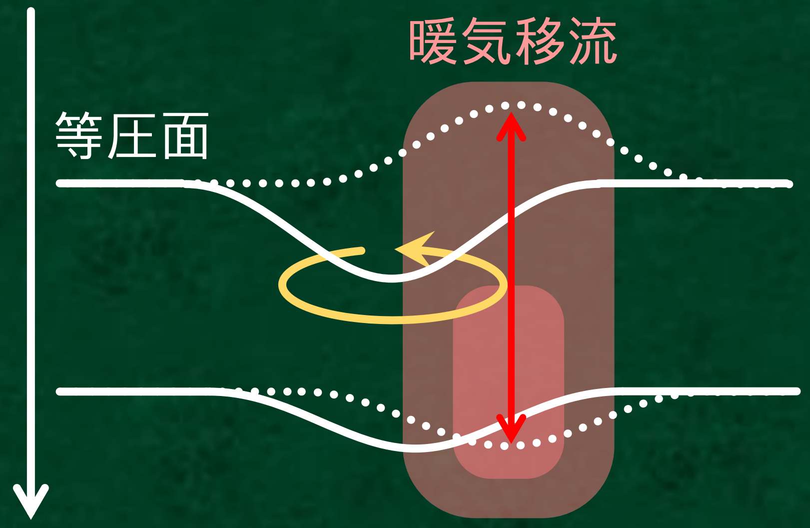
下層 $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{adv}(T)$

ω方程式の意味：定性的解釈，非地衡風による調節



上層 $$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} = \mathrm{adv}(\zeta_g)$$

下層 $$\frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{adv}(T)$$



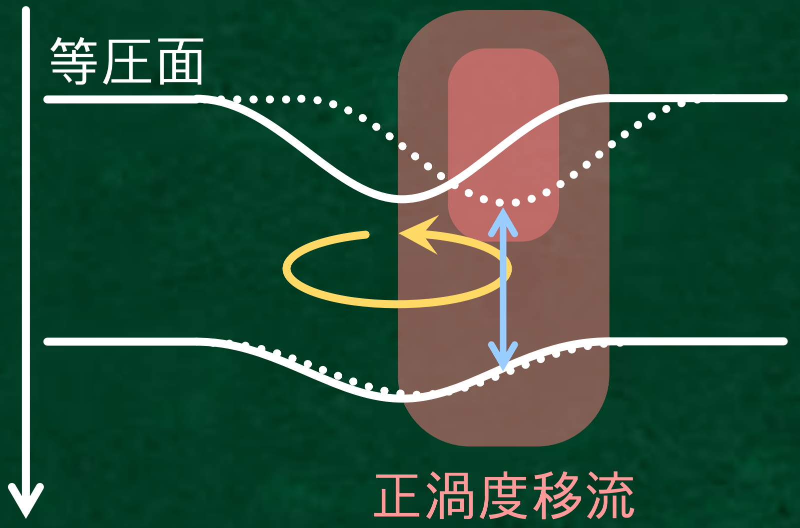
負　　正

上層 $$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} = \mathrm{adv}(\zeta_g)$$

正　　正

下層 $$\frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{adv}(T)$$

ω方程式の意味：定性的解釈，非地衡風による調節



正　　正

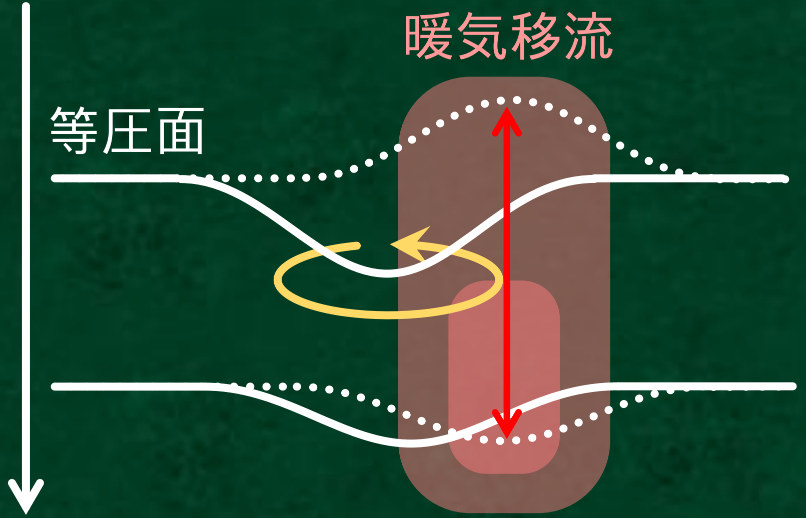
上層　$\dfrac{\partial \zeta_g}{\partial t} = \mathrm{adv}(\zeta_g)$

負　　正

下層　$\dfrac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{adv}(T)$

辻褄が合わない…

→地衡流による移流は温度風の関係を壊すようにはたらく



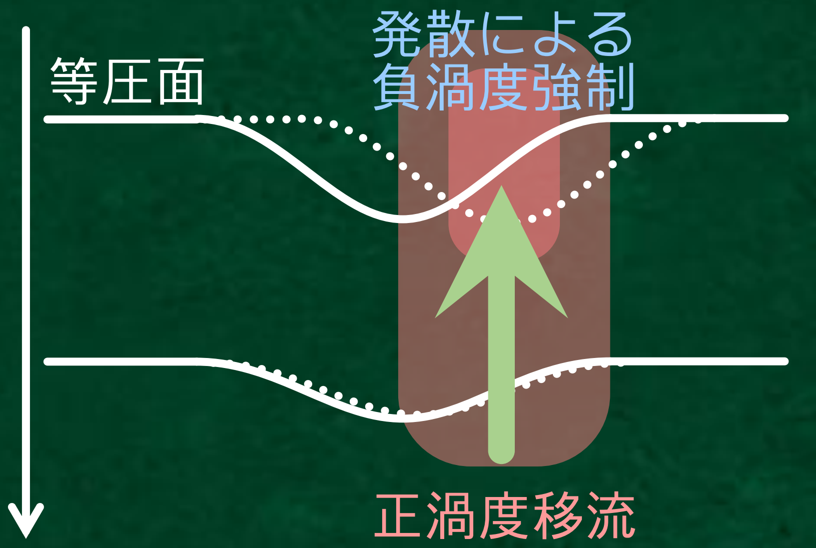
負　　正

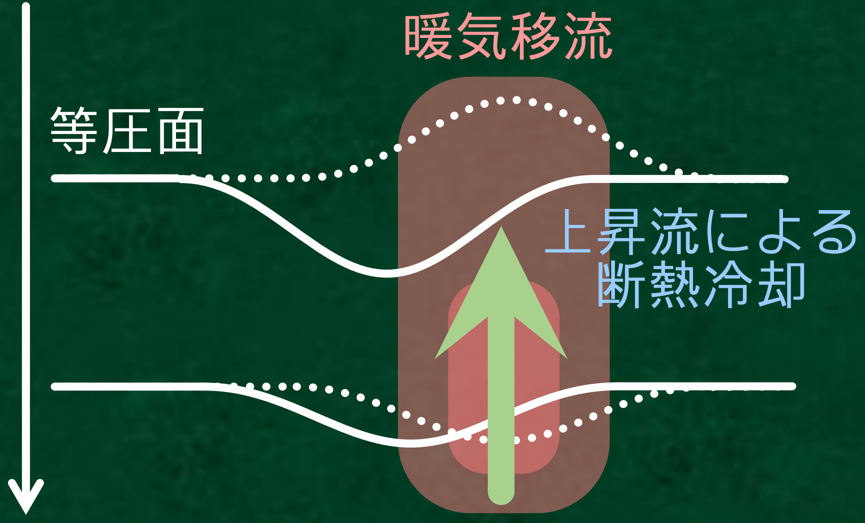
上層　$\dfrac{\partial \zeta_g}{\partial t} = \mathrm{adv}(\zeta_g)$

正　　正

下層　$\dfrac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{adv}(T)$

ω方程式の意味：定性的解釈，非地衡風による調節





上層 $$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} = \overset{\text{正}}{\mathrm{adv}(\zeta_g)} \overset{\text{負}}{+ f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p}}$$

下層 $$\frac{\partial T}{\partial t} = \overset{\text{正}}{\mathrm{adv}(T)}$$

鉛直流（非地衡風）が
収束·発散による渦度変化
断熱加熱·冷却による温度変化
を通して辻褄を合わせてくれる

上層 $$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} = \overset{\text{正}}{\mathrm{adv}(\zeta_g)}$$

下層 $$\frac{\partial T}{\partial t} = \overset{\text{正}}{\mathrm{adv}(T)} \overset{\text{負}}{+ S_0 \omega}$$

ω方程式の意味：定性的解釈，非地衡風による調節

もし場が完全に地衡風だったら，渦度と温度を地衡風と整合的に保つことができない
地衡風を地衡風に保ち続けるためには，非地衡風による渦度と温度の調節が必要

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} = -u_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial x} - v_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial y} + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p}, \qquad \frac{\partial T}{\partial t} = -u_g \frac{\partial T}{\partial x} - v_g \frac{\partial T}{\partial y} + S_0 \omega$$

非地衡風による
地衡風への調節

つまり，ω方程式は「地衡風が常に地衡風であるために必要な鉛直流」を表す

時間微分を含まないことから推測されるように，
「地衡風による移流」と「鉛直流（非地衡風）」との間の因果関係を示すわけではなく，
刻一刻と変化する地衡風と整合する鉛直流を診断するだけである

（しかし一般的には，前者が後者を誘起する強制だとみなすことが多い）

逆の言い方をすれば，非地衡風による調節が効くようにしか渦度と温度は変化できない
ということである

→ そのような渦度変化や温度変化を知りたい

準地衡風における渦度変化と温度変化（再）

$$\underbrace{\frac{\partial \zeta_g}{\partial t}}_{\text{地衡風の時間変化}} = \underbrace{-u_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial x} - v_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial y}}_{\text{地衡風による移流}} + \underbrace{f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p}}_{\text{非地衡風による時間変化}}$$

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial y} = f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

$$\underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{地衡風の時間変化}} = \underbrace{-u_g \frac{\partial T}{\partial x} - v_g \frac{\partial T}{\partial y}}_{\text{地衡風による移流}} + \underbrace{S_0 \omega}_{\text{非地衡風による時間変化}}$$

$$\frac{1}{S_0}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{S_0}\left(u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y}\right) = \omega$$

ω方程式は左辺の時間変化項を消すことで導かれたが，ここでは右辺の非地衡風項を消して，地衡風だけからなる関係式を導く

✿ 傾向方程式の導出

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial p}\left\{\frac{f_0}{S_0}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{f_0}{S_0}\left(u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y}\right)\right\}$$

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0}{S_0}T\right) = -u_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial x} - v_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial p}\left\{\frac{f_0}{S_0}\left(-u_g \frac{\partial T}{\partial x} - v_g \frac{\partial T}{\partial y}\right)\right\} \qquad \cdots(*)$$

左辺の渦度と温度をジオポテンシャルを用いて書き直すと，

$$\zeta_g = \nabla^2\left(\frac{\Phi}{f_0}\right),\quad \frac{RT}{p} = -\frac{\partial \Phi}{\partial p}$$ より，

$$\underbrace{\left(\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial p}\frac{f_0^2}{\sigma_0}\frac{\partial}{\partial p}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial t}}_{\text{地衡風の時間変化}} = \underbrace{f_0\left(-u_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial x} - v_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial p}\left\{\frac{R f_0^2}{p\sigma_0}\left(-u_g \frac{\partial T}{\partial x} - v_g \frac{\partial T}{\partial y}\right)\right\}}_{\text{地衡風による渦度と温度の移流}}$$

$$-\mathcal{K}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = f_0\,\mathrm{adv}(\zeta_g) - \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{R f_0^2}{p\sigma_0}\mathrm{adv}(T)\right)$$

傾向方程式の意味：定性的説明

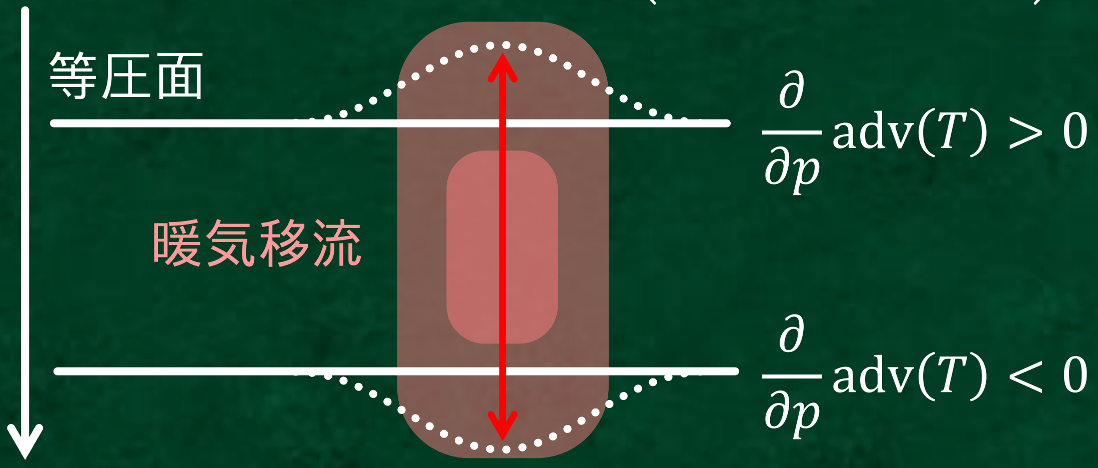
$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \sim -\frac{f_0}{\mathcal{K}^2}\,\mathrm{adv}(\zeta_g)$$

正の渦度移流 $\left(\mathrm{adv}(\zeta_g) > 0\right)$ → 高度の低下傾向
負の渦度移流 $\left(\mathrm{adv}(\zeta_g) < 0\right)$ → 高度の上昇傾向

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \sim \frac{1}{\mathcal{K}^2}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{R f_0^2}{p\sigma_0}\mathrm{adv}(T)\right)$$

下層ほど温度移流が大きい $\left(\frac{\partial}{\partial p}\mathrm{adv}(T) > 0\right)$ → 高度の上昇傾向

実際の高度変化傾向は両者の兼ね合いで決まる



傾向方程式の意味：定性的説明

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \sim -\frac{f_0}{\mathcal{K}^2}\,\mathrm{adv}\left(\zeta_g\right)$$

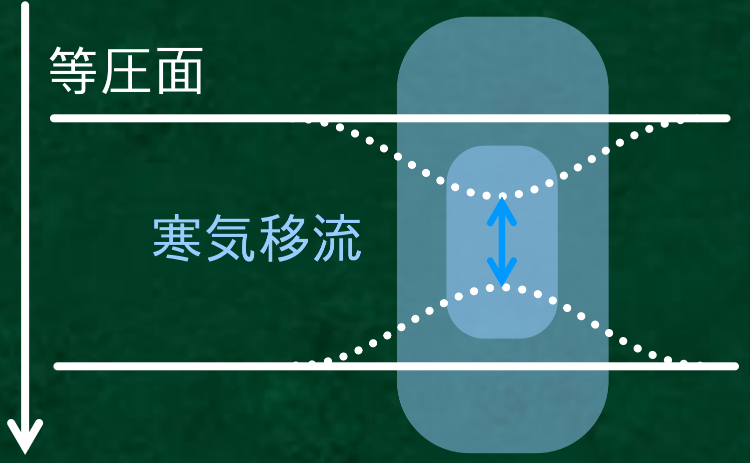
正の渦度移流 $\left(\mathrm{adv}\left(\zeta_g\right) > 0\right)$ → 高度の低下傾向

負の渦度移流 $\left(\mathrm{adv}\left(\zeta_g\right) > 0\right)$ → 高度の上昇傾向

実際の高度変化傾向は両者の兼ね合いで決まる

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \sim \frac{1}{\mathcal{K}^2}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{R f_0^2}{p\sigma_0}\mathrm{adv}(T)\right)$$

下層ほど温度移流が大きい $\left(\frac{\partial}{\partial p}\mathrm{adv}(T) > 0\right)$ → 高度の上昇傾向



$\frac{\partial}{\partial p}\mathrm{adv}(T) < 0$

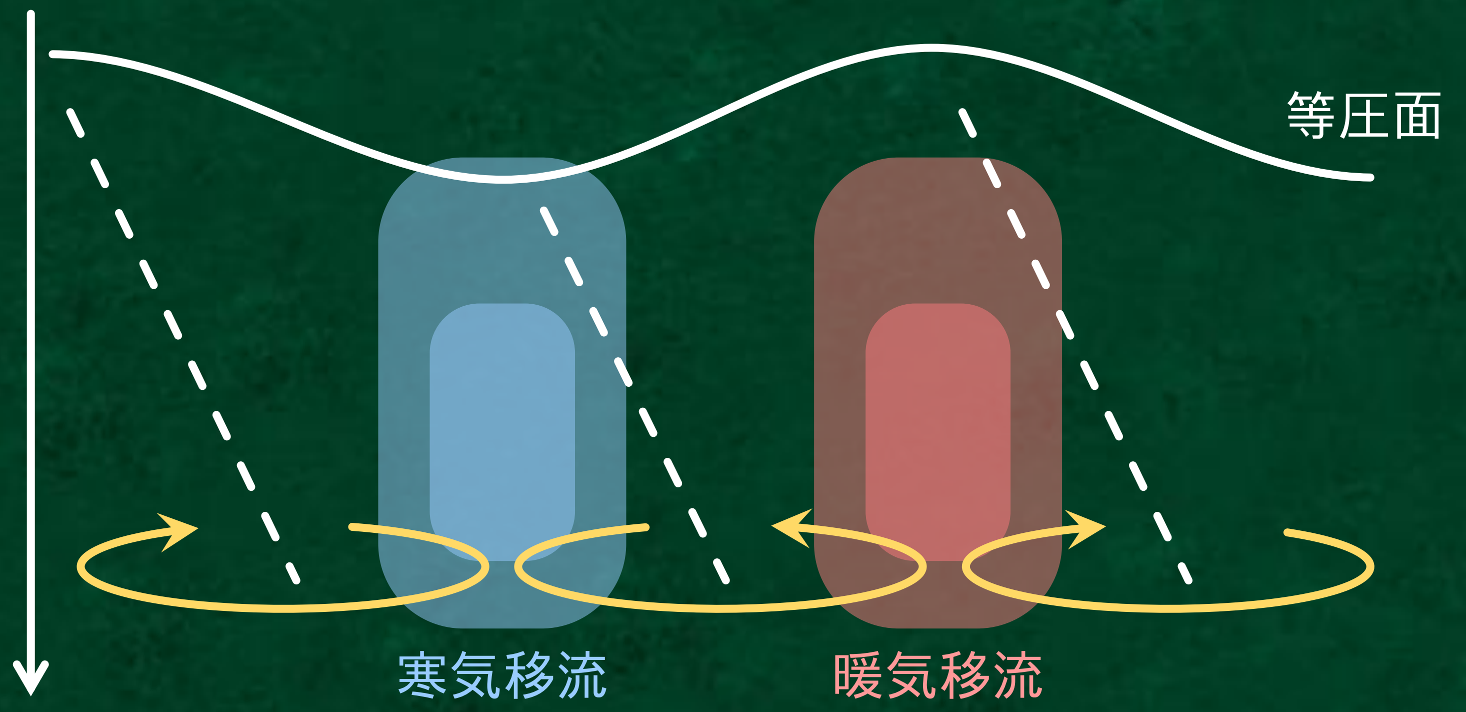
$\frac{\partial}{\partial p}\mathrm{adv}(T) > 0$

✿ 傾向方程式の意味：定性的説明

下層の温度移流による上層の偏西風波動の成長

リッジ（Φ が大きい）で $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} > 0$，

トラフ（Φ が小さい）で $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} < 0$ のとき，リッジやトラフは成長する



リッジやトラフの軸が
高度とともに西に傾く

準地衡風渦位方程式

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0}{S_0}T\right) = -u_g\frac{\partial \zeta_g}{\partial x} - v_g\frac{\partial \zeta_g}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial p}\left\{\frac{f_0}{S_0}\left(-u_g\frac{\partial T}{\partial x} - v_g\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right\} \qquad \cdots (*)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\zeta_g - \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0}{S_0}T\right)\right\} = -u_g\frac{\partial \zeta_g}{\partial x} - v_g\frac{\partial \zeta_g}{\partial y}$$

$$-u_g\frac{\partial}{\partial x}\left\{-\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0}{S_0}T\right)\right\} - v_g\frac{\partial}{\partial y}\left\{-\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0}{S_0}T\right)\right\} + \cancelto{0}{\frac{f_0}{S_0}\left(\frac{\partial u_g}{\partial p}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial p}\frac{\partial T}{\partial y}\right)}$$

※ 温度風の関係より，

$$\frac{\partial u_g}{\partial p}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial p}\frac{\partial T}{\partial y} = \left(\frac{R}{f_0 p}\frac{\partial T}{\partial y}\right)\frac{\partial T}{\partial x} + \left(-\frac{R}{f_0 p}\frac{\partial T}{\partial x}\right)\frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

準地衡風渦位方程式

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0}{S_0}T\right) = -u_g\frac{\partial \zeta_g}{\partial x} - v_g\frac{\partial \zeta_g}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial p}\left\{\frac{f_0}{S_0}\left(-u_g\frac{\partial T}{\partial x} - v_g\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right\} \qquad \cdots (*)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\zeta_g - \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0}{S_0}T\right)\right\} = -u_g\frac{\partial \zeta_g}{\partial x} - v_g\frac{\partial \zeta_g}{\partial y} - u_g\frac{\partial}{\partial x}\left\{-\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0}{S_0}T\right)\right\} - v_g\frac{\partial}{\partial y}\left\{-\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0}{S_0}T\right)\right\}$$

ここで，渦度と温度を組み合わせた変数，$q_g = \zeta_g - \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0}{S_0}T\right)$ で書き換える

$$\frac{\partial q_g}{\partial t} = -u_g\frac{\partial q_g}{\partial x} - v_g\frac{\partial q_g}{\partial y}, \qquad \frac{D_g}{Dt}q_g = \frac{\partial q_g}{\partial t} + u_g\frac{\partial q_g}{\partial x} + v_g\frac{\partial q_g}{\partial y} = 0$$

これは q_g のラグランジュ的時間変化が０，つまり q_g の保存則を示す

q_g は渦度と温度とを組み合わせた量で，準地衡風渦位とよばれる

まとめ

- 中高緯度における総観規模の大気の運動は，準地衡風近似により記述される
- 準地衡風近似では非地衡風にはたらくコリオリ力が地衡風を変化させる
- 準地衡風渦度方程式と熱力学方程式（断熱変化）：
  渦度変化　＝　地衡風による移流　＋　非地衡風に伴う収束・発散の寄与
  温度変化　＝　地衡風による移流　＋　鉛直流に伴う断熱加熱・冷却の寄与
- 二式から時間変化を消去すると，渦度と温度が温度風の関係を満たし続けるために必要な鉛直流（非地衡風）を診断する「ω方程式」が得られる
- 二式から非地衡風の寄与を消去すると，非地衡風による温度風の関係への調節が行われたジオポテンシャルの時間変化を導く「傾向方程式」が得られる
- 渦度と温度それぞれの時間変化を記述する式には非地衡風成分が含まれるが，両者を組み合わせた「準地衡風渦位」の時間変化は地衡風成分だけで記述され，地衡風の流れに沿って保存する性質がある